UPN

UNIVERSIDAD
PRIVADA
DEL NORTE

Integración por partes y Sustitución Trigonométrica Módulo 11

Cálculo 1

2023-1

Videoconferencia 12

Temario

- Método de Integración por partes.
- Método de sustitución trigonométrica

Motivación

A cuidarnos del dengue

En la provincia de Lima, en los últimos cinco años; presentó brotes del dengue en los distritos de La Molina, Lurigancho, Lima, Puente Piedra y Ate. El brote más importante fue en el 2021, en el distrito de Lurigancho. Actualmente la razón de llegada de casos nuevos reportados en la provincia de Lima según el MINSA está dada por $C'(x) = e^{\sqrt{x}}$, donde x está medido en días, cuando x = 0 es el inicio de la epidemia. ¿Cuántos casos han tratado en Lima según la sala situacional del MINSA cuando x =9?

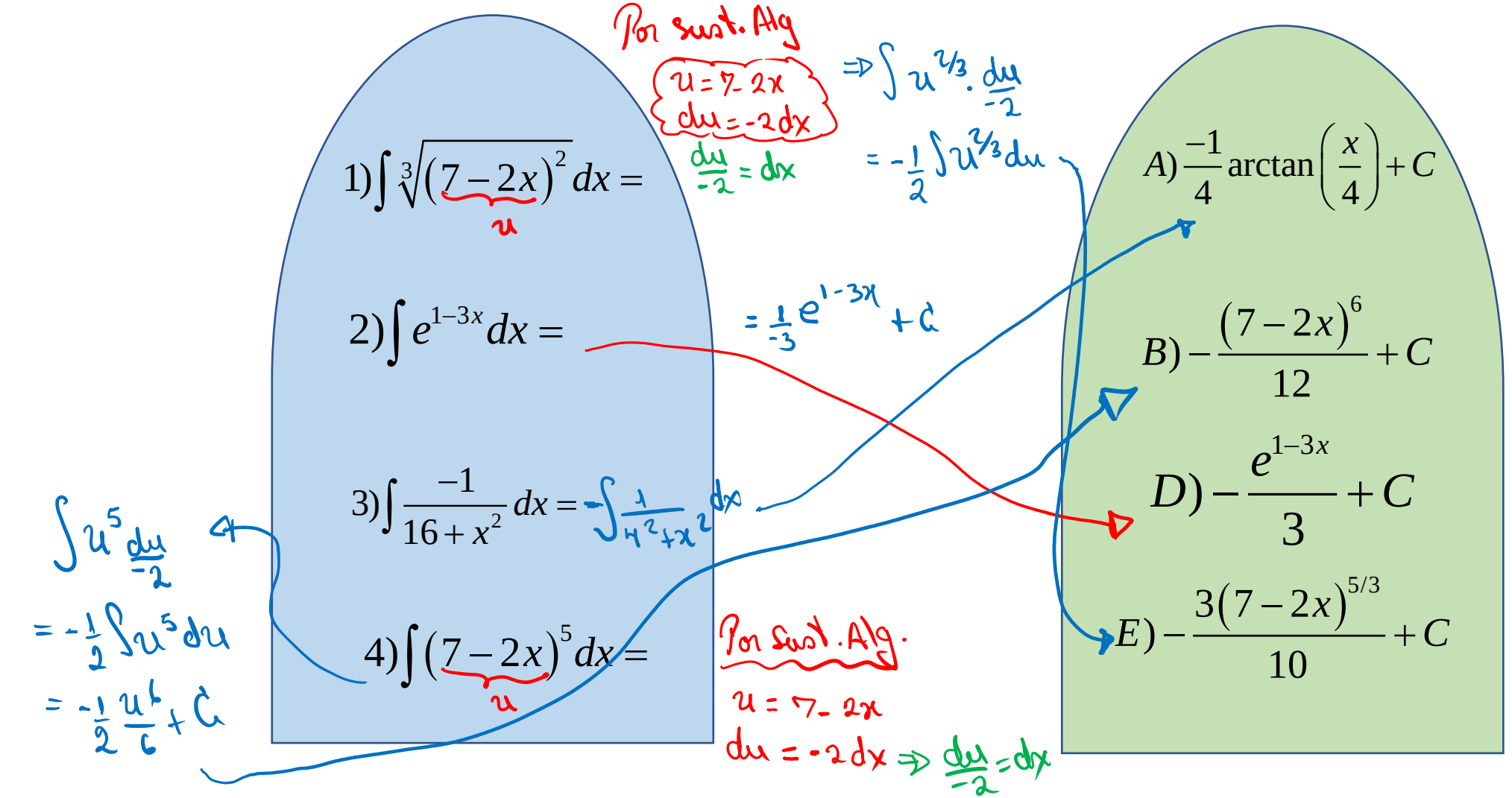
$C(x) = \int C'(x)\,dx$?

LOGRO DE APRENDIZAJE

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios y/o problemas aplicados a la Ingeniería calculando integrales indefinidas por los métodos de integración por partes y de sustitución trigonométrica, de manera eficiente y consistente.

Saberes previos

Relaciona las integrales de la columna izquierda con su respectiva solución dada en la columna derecha.



1. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Se puede decir que la integración es una operación inversa a la derivación, entonces de la derivada del producto, se puede deducir la fórmula de la integración por partes.

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot v(x)\right]=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$$u(x)\cdot v(x)=\int v(x)u'(x)dx+\int u(x)v'(x)dx$$

$$du=u'(x)dx,\quad dv=v'(x)dx$$

$$\boxed{\int udv=u\cdot v-\int v\,du}$$

Fórmula de integración por partes

1. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Para resolver una integral por el método de integración por partes primero se comienza por identificar a qué función se debe derivar y a que función se debe integrar, para ello se puede recurrir a la técnica memorística:

Se deriva la letra que queda a la izquierda y se integra la que queda a la derecha

I L A T E

$arctan(x)$

INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

$ln(ax)$

LOGARÍTMICAS

$x^2 + 2x$

ALGEBRAICAS

$sen(ax)$

TRIGONOMÉTRICAS

e^{ax+b}

EXPONENCIALES

Ejemplo:

$$\int (x-3)ln(x)dx$$

A L

Dado que en **I L A T E**, L está a la izquierda de A, entonces:

$u = ln(x)$ se debe derivar

$dv = (x-3)dx$ se debe integrar

EJERCICIOS

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Ejemplo 1. Calcular $\int x^2 \ln(x)\,dx$

ILATE

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Solución:

$u = \ln x \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow \int x^2 \ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \;//.$$

EJERCICIOS

Ejemplo 1. Calcular $\int x^2 \ln(x)\,dx$

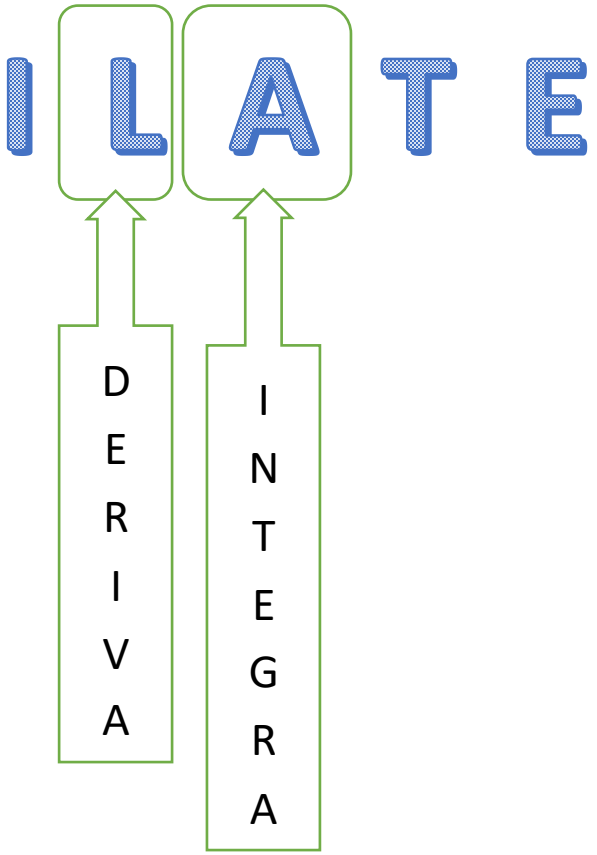
Solución: $\int x^2 \ln(x)\,dx$

Deriva $u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

Integra $dv = x^2\,dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{\ln(x)\,x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int x^2 \ln(x)\,dx = \frac{\ln(x)\,x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$



EJERCICIOS

Ejemplo 2: Calcular $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} 3x\, dx}_{dv}$

A T

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$

$u = x$ $\quad dv = \operatorname{sen} 3x\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \int \operatorname{sen} 3x\,dx$

$= -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$\Rightarrow \int x \operatorname{sen} 3x\,dx = (x)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) dx$$

$$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx$$

$$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$$

ILATE

$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

$\int \cos(ax+b)\,dx = \operatorname{sen}(ax+b) + C$

MÉTODO TABULAR

Es un método simplificado de la integración por partes, es útil cuando el proceso de integración por partes debe hacerse de manera reiterada.

Ejemplo 3: Calcular $M = \int (x^2 - x)\cos(\frac{1}{2}x)dx$

	Deriva	Integra
(+)	$x^2 - x$	$\cos(\frac{1}{2}x)$
(–)	$2x - 1$	$2sen\left(\frac{1}{2}x\right)$
(+)	2	$-4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$
	0	$-8sen\left(\frac{1}{2}x\right)$

I L A T E

DERIVA $x^2 - x$

INTEGRA $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

El método consiste en multiplicar las derivadas e integrales (según lo que señalan las flecha), anteponiendo al producto el signo (+) o (-) de manera alternada

$$M = 2\left(x^2 - x\right)sen\left(\frac{x}{2}\right) + 4\left(2x - 1\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 16sen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

EJERCICIOS

Ejemplo 4: Calcular $\int (x^3 + x + 5)\, e^{2x} dx = I$

ILATE

(+) x^3+x+5 → e^{2x}

(−) $3x^2+1$ → $\frac{1}{2}e^{2x}$

(+) $6x$ → $\frac{1}{4}e^{2x}$

(−) 6 → $\frac{1}{8}e^{2x}$

0 → $\frac{1}{16}e^{2x}$

$\Rightarrow I = (x^3+x+5)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - (3x^2+1)\cdot\frac{1}{4}e^{2x} + 6x\cdot\frac{1}{8}e^{2x} - 6\cdot\frac{1}{16}e^{2x} + C$

$u = x^3+x+5 \quad dv = e^{2x}dx$

$du = (3x^2+1)dx \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$I = u.v - \int v\,du$

$= (x^3+x+5)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot(3x^2+1)dx$

$= \frac{(x^3+x+5)}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int \underbrace{(3x^2+1)}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv}$

EJERCICIOS

Ejemplo 4: Calcular $\int (x^3 + x + 5)\, e^{2x} dx$

I L A T E

Derivada | Integrales

$(+)$	$x^3 + x + 5$	e^{2x}
$(-)$	$3x^2 + 1$	$\frac{e^{2x}}{2}$
$(+)$	$6x$	$\frac{e^{2x}}{4}$
$(-)$	6	$\frac{e^{2x}}{8}$
	0	$\frac{e^{2x}}{16}$

EJERCICIOS

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

Ejemplo 5: Calcular

$$M = \int \underbrace{\cos(x+3)}_{u}\,\underbrace{e^{5x}dx}_{dv}$$

ILATE

Solución:

$u = \cos(x+3)$ $\quad dv = e^{5x}dx$

$du = -\operatorname{sen}(x+3)dx$ $\quad v = \frac{1}{5}e^{5x}$

$$\Rightarrow M = \cos(x+3).\frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}.-\operatorname{sen}(x+3)dx$$

$$M = \frac{1}{5}\cos(x+3)e^{5x} + \frac{1}{5}\int e^{5x}\operatorname{sen}(x+3)dx$$

$u = \operatorname{sen}(x+3)$ $\quad dv = e^{5x}.dx$

$du = \cos(x+3)dx$ $\quad v = \frac{1}{5}e^{5x}$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{5}\cos(x+3)e^{5x} + \frac{1}{5}\left(\operatorname{sen}(x+3).\frac{1}{5}e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}.\cos(x+3)dx\right)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{5}\cos(x+3)e^{5x} + \frac{1}{25}\operatorname{sen}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}\underbrace{\int e^{5x}.\cos(x+3)dx}_{M}$$

$$\Rightarrow M + \frac{1}{25}M = \frac{1}{5}\cos(x+3)e^{5x} + \frac{1}{25}\operatorname{sen}(x+3)e^{5x}$$

$$\frac{26}{25}M =$$

$$M = \frac{25}{26}\left[\frac{1}{5}\cos(x+3)e^{5x} + \frac{1}{25}\operatorname{sen}(x+3)e^{5x}\right] + C$$

EJERCICIOS

Ejemplo 5: Calcular $$M = \int \cos(x+3)\, e^{5x}\, dx$$

ILATE

Solución:

I L A T E

Derivada Integrales

$(+)$	$\cos(x+3)$	e^{5x}
$(-)$	$-sen(x+3)$	$\frac{e^{5x}}{5}$
$(+)$	$-\cos(x+3)$	$\frac{e^{5x}}{25}$

$\int$

2. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

El método de sustitución trigonométrica se utiliza cuando el integrando presenta cualquiera de los siguientes radicandos en su composición.

$$\sqrt{a^2+x^2},\ \sqrt{a^2-x^2},\ \sqrt{x^2-a^2}$$

Pasos para la sustitución trigonométrica:

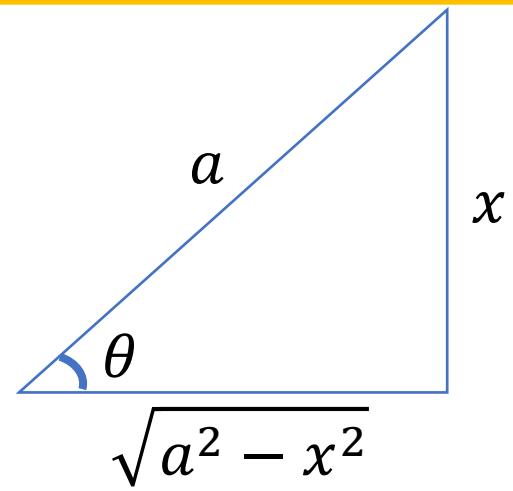
1. Identificar el tipo de raíz que se tiene.
2. Se reemplaza la variable x y el dx, en términos de la nueva variable θ.
3. Se resuelve la integral trigonométrica.
4. Se reemplaza la variable original, es decir, en términos de x, en la solución obtenida de la parte 3, para ello siempre es recomendable elaborar un triángulo rectángulo.

CASO 1. RAÍZ $\sqrt{a^2 - x^2}$

$x = a\,sen(\theta) \rightarrow dx = a\cos(\theta)\,d\theta$

Identidad trigonométrica usada:

$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$



Ejemplo 1. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{6x - x^2}}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6x - x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{-(x^2 - 6x)}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{9 - (x-3)^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^2}{\sqrt{3^2 - (x-3)^2}}\,dx$$

$x - 3 = 3\,sen\theta \rightarrow x = 3\,sen\theta + 3$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$$= \int \frac{(3\,sen\theta + 3)^2}{\sqrt{9 - (3\,sen\theta)^2}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

Solución de ejemplo 1.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx = \int \frac{(3sen(\theta)+3)^2\,(3\cos(\theta))\,d\theta}{\sqrt{9-9sen^2(\theta)}}$$

$$= \int \frac{27(sen^2(\theta)+2sen(\theta)+1)\cos(\theta)\,d\theta}{3\cos(\theta)}$$

$$= \int 9\left(sen^2(\theta)+2sen(\theta)+1\right)d\theta$$

$$sen^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-(x-3)^2}}\,dx = \int \left[9\left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)+18sen(\theta)+9\right]d\theta$$

$$= \int \left[\left(\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\cos(2\theta)+18sen(\theta)\right]d\theta$$

$$= \frac{27}{2}\theta - \frac{9}{2}sen\theta\cos\theta - 18\cos\theta + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx =$$

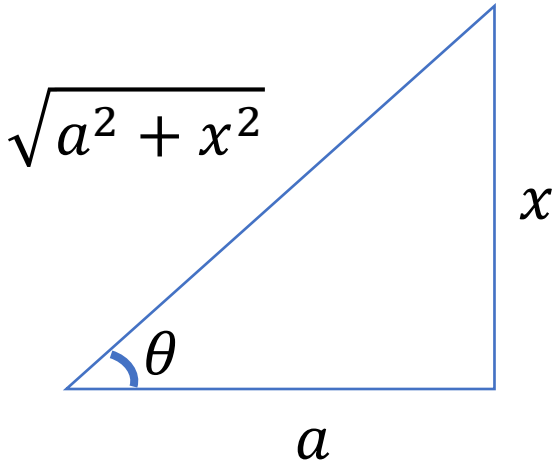
CASO 2. RAÍZ $\sqrt{a^2+x^2}$

$$x = a\tan(\theta)$$

$$dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$$

Identidad trigonométrica usada:

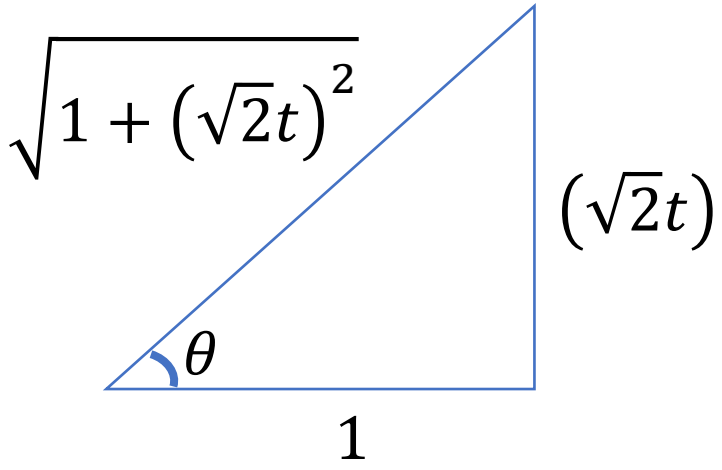
$$1+\tan^2(x) = \sec^2(x)$$



Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{1}{(2t^2+1)^{3/2}}\,dt$

Solución:

$$\tan(\theta) = \sqrt{2}t \;\rightarrow\; \sec^2(\theta)\,d\theta = \sqrt{2}dt$$



Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{1}{\left(2t^2+1\right)^{\sqrt{2}}}\,dt$

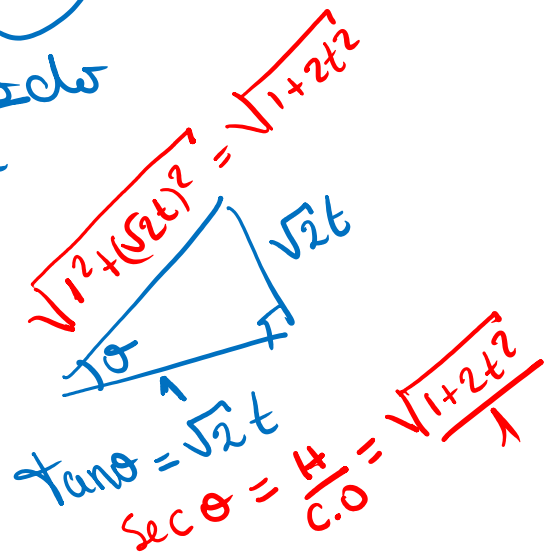
Solución:

$x = a\tan\theta$

$\sqrt{2}\,t = \tan\theta$

$\sqrt{2}\,dt = \sec^2\theta\,d\theta$

$\Rightarrow dt = \dfrac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{2}}$



$$\int \frac{1}{\left(2t^2+1\right)^{\sqrt{2}}}\,dt = \int \frac{1}{\left[(\sqrt{2}t)^2+1\right]^{\sqrt{2}}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\left[\tan^2\theta+1\right]^{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\left[\sec^2\theta\right]^{\sqrt{2}}} \cdot \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sec\theta} \cdot \sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\tan\theta+\sec\theta\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{1+2t^2}\right| + C \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{1}{\left(2t^2+1\right)^{\sqrt{2}}}\,dt$

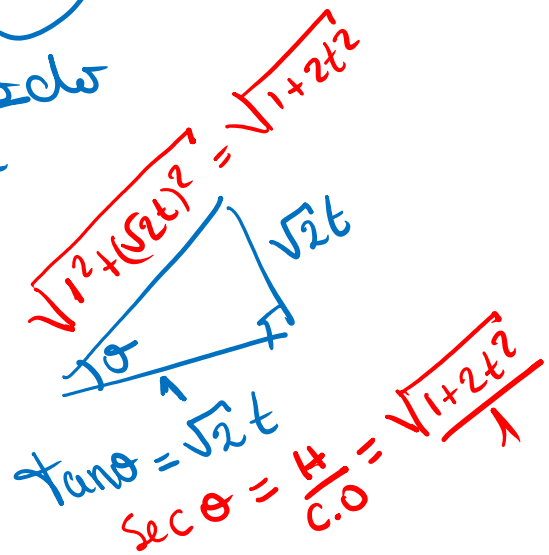
Solución:

$x = a\tan\theta$

$\sqrt{2}\,t = \tan\theta$

$\sqrt{2}\,dt = \sec^2\theta\,d\theta$

$\Rightarrow dt = \dfrac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{2}}$



$$= \int \frac{1}{\left[(\sqrt{2}t)^2+1\right]^{\sqrt{2}}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\left[\tan^2\theta+1\right]^{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left[\sec^2\theta\right]^{\sqrt{2}}}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

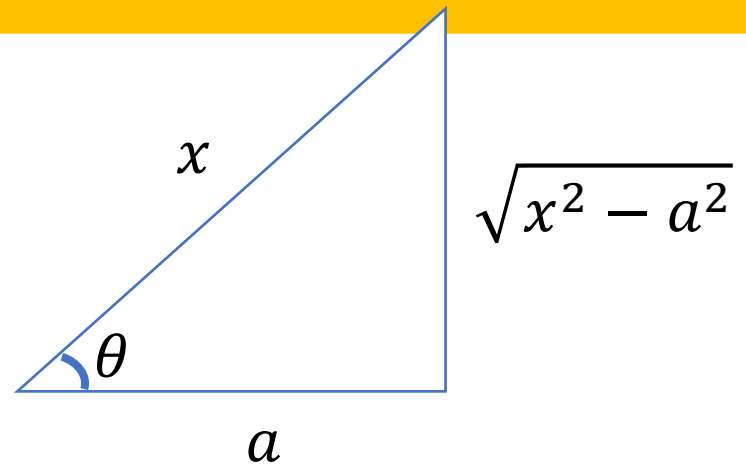
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sec\theta}\cdot\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sec\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\theta+\sec\theta\right|+C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+\sqrt{1+2t^2}\right|+C \quad \blacksquare$$

CASO 3. RAÍZ $\sqrt{x^2 - a^2}$



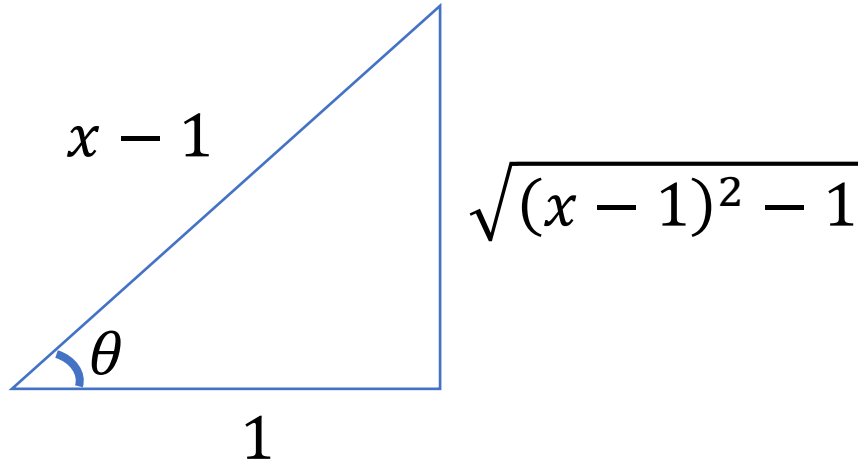
$$x = a\sec(\theta)$$

$$dx = a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{3}{\left(x^2 - 2x\right)^{3/2}} dx$

Solución:

$$\int \frac{3}{\left(x^2 - 2x\right)^{3/2}} dx = \int \frac{3}{\left((x-1)^2 - 1\right)^{3/2}} dx$$



$x - 1 = \sec(\theta) \rightarrow \quad dx = \sec(\theta)\ \tan(\theta)\,d\theta$

Verificación del aprendizaje

https://quizizz.com/admin/quiz/60af3c68519c97001bcc4dc0/?fromSearch=true&source=null&gameLeft=true

Logro de la sesión

SE LOGRÓ

Al finalizar la sesión, el estudiante resuelve ejercicios y/o problemas aplicados a la Ingeniería calculando integrales indefinidas por los métodos de integración por partes y de sustitución trigonométrica, de manera eficiente y consistente.

Conclusiones

1. Dadas las funciones derivables u, v; el método de integración por partes presenta la siguiente estructura:

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

2. El método de sustitución trigonométrica, consiste en transformar el integrando a través de funciones trigonométricas y convertirla en una expresión más simple de integrar. EL método funciona cuando se presentan cualquiera de las siguientes raíces:

$$\sqrt{a^2 - x^2},\ \sqrt{a^2 + x^2}, \sqrt{x^2 - a^2}$$

Fuente: https://respuestas.tips/wp-content/uploads/2018/12/5-7.jpg

Metacognición

- ¿En qué aspectos de tu vida te podrán servir resolver problemas mediante la integración por partes y la sustitución trigonométrica?
- ¿Qué dificultades se presentaron en la resolución de problemas?
- ¿De qué manera resolví las dificultades encontradas?
- ¿Qué he aprendido en esta sesión?

Bibliografía

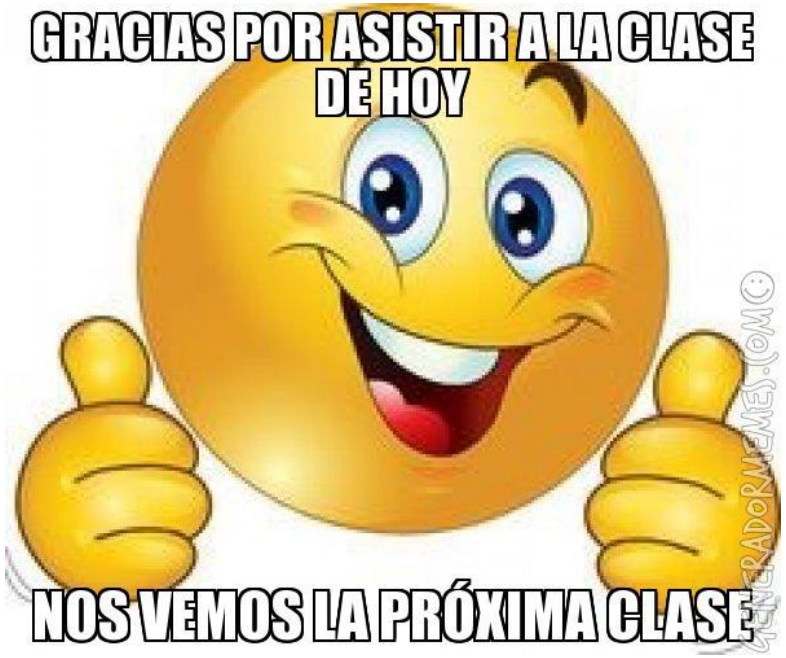
1. Leithold, L. (1994). *El Cálculo.* Mexico: Oxford University Press.
2. Purcell, V. R. (2007). *Cálculo.* México: Prentice Hall INC.
3. Ron Larson, B. E. (2010). *Cálculo 1 de una variable.* México: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
4. Stwart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (Vol. Séptima Edición). Mexico DF: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Consultas

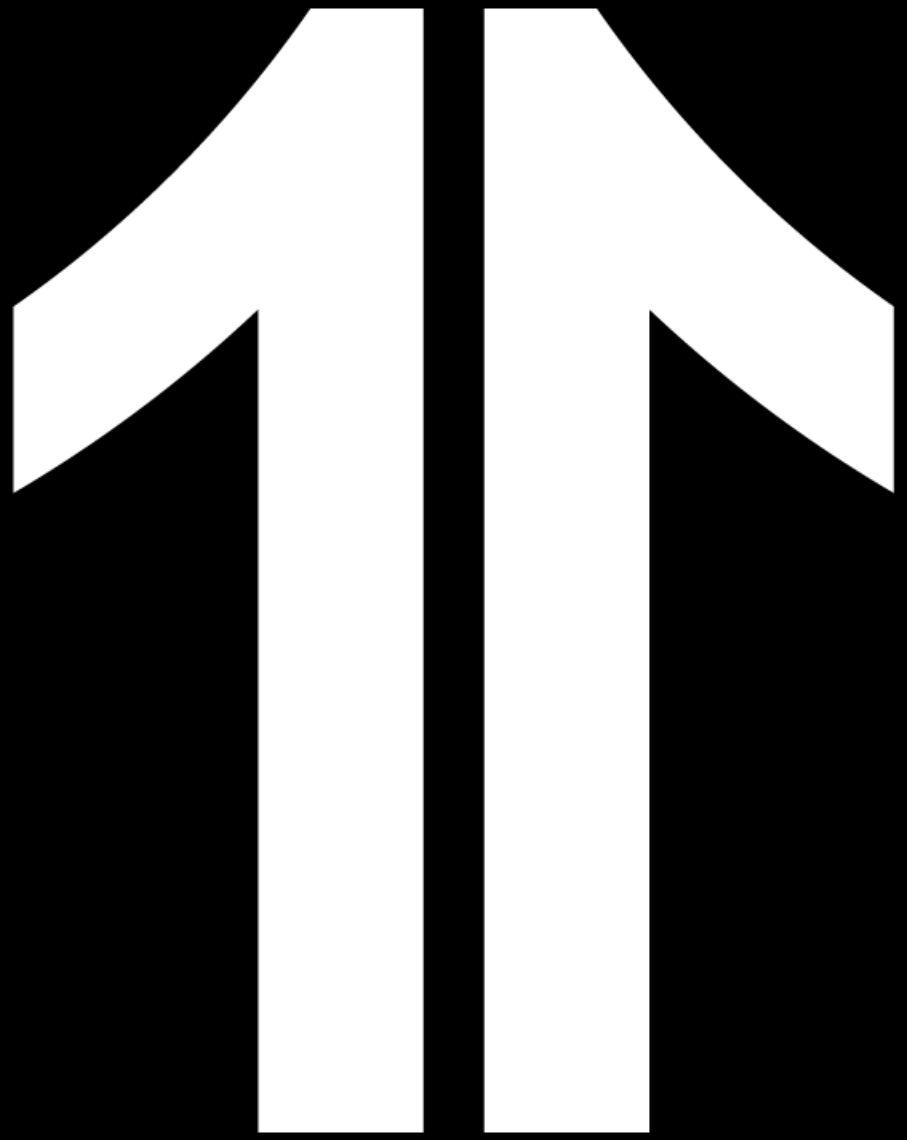
Realice consultas a través del chat o solicita al docente activar el micrófono para participar.

También podrás enviar sus consultas a través de Preguntas al profesor y te responderé en 24 horas.

La próxima clase desarrollaremos el tema de “Integración por fracciones parciales”



$$\int \frac{(x-1)}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)}$$



GRACIAS

UPN
UNIVERSIDAD
PRIVADA
DEL NORTE